PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

5 dicembre 2000

1) *La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere* **(A)** , **(B)** , **(C)** , **(D)** , **(E)** .
2) *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.*
3) *Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia.* NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) *Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento!*

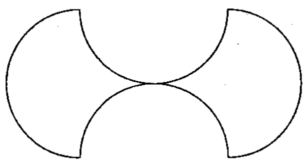
Nome ____________ *Cognome*____________ *Classe*______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Un podista e un ciclista partono insieme dalla città A diretti alla città B distante da A 13 km, con l'accordo di fare la spola fra A e B senza fermarsi mai. Sapendo che ogni ora il podista percorre 9 km mentre il ciclista ne percorre 25, quale distanza separerà i due sportivi dopo tre ore dall'inizio della competizione?
(A) 1 km **(B)** 2 km **(C)** 3 km **(D)** 4 km **(E)** 5 km.

2) Quale fra i seguenti numeri è superiore all'unità?
(A) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ **(B)** $(1{,}1)^{-1{,}1}$ **(C)** $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$ **(D)** $(\sqrt{2}-1)^{\sqrt{2}-1}$
(E) $(2-\sqrt{3})^{2-\sqrt{3}}$.

3) Il perimetro della regione raffigurata a fianco è formato da quattro semicirconferenze di diametro 10 cm. Quanto vale la sua area?
(A) 100 cm^2 **(B)** $100\pi\sqrt{2}$ cm^2 **(C)** 50π cm^2
(D) 100π cm^2 **(E)** 25π cm^2.



4) Un padre ha 46 anni e la somma delle età dei suoi tre figli è 22. Entro quanti anni l'età del padre sarà uguale alla somma delle età dei figli?
(A) 6 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 12 **(E)** mai.

5) Nel triangolo ABC le semirette AN e CM sono le bisettrici di $B\hat{A}C$ e $B\hat{C}A$ e si intersecano in P. Sapendo che $A\hat{P}C = 140°$, quanto misura l'angolo in B?
(A) 90° **(B)** 100° **(C)** 110° **(D)** 120° **(E)** 130°.

6) Si considerino i numeri naturali n di tre cifre che verificano la seguente proprietà: le cifre di n sono tre numeri consecutivi in ordine qualsiasi (esempio 645). Quanti fra questi numeri sono primi?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** più di 2, ma meno di 10 **(E)** più di 10.

7) Fra tutti i triangoli i cui lati misurano 4, 5, x, quello di area massima avrà x pari a
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 4,5 **(D)** $\sqrt{20}$ **(E)** $\sqrt{41}$.

8) Una novella Penelope ha tessuto una tela per tutto il 1999, dal primo all'ultimo giorno. Ogni mattina ha tessuto 20 cm di tela e ogni pomeriggio ne ha disfatta un po', precisamente 20 cm nei giorni pari del mese e 19 cm nei giorni dispari. Quanto era lunga la tela alla fine?
(A) 140 cm **(B)** 172 cm **(C)** 186 cm **(D)** 200 cm **(E)** 210 cm.

9) In una scuola il 60% degli studenti è di sesso maschile, il 90% è minorenne ed il 60% ha i capelli castani. Quale delle seguenti affermazioni è necessariamente vera?
(A) C'è almeno una ragazza maggiorenne.
(B) C'è almeno una ragazza con i capelli castani.
(C) C'è almeno un ragazzo minorenne e castano.
(D) Non ci sono ragazzi maggiorenni e castani.
(E) C'è almeno un ragazzo biondo.

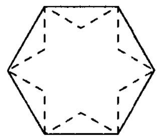
10) Sapendo che $\frac{1}{a} = a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{d} = 2$ quanto vale il prodotto $abcd$?
(A) $\frac{5}{16}$ **(B)** $\frac{1}{5}$ **(C)** $\frac{3}{7}$ **(D)** $\frac{9}{16}$ **(E)** $\frac{5}{4}$.

11) Marco dice: ***"La mia squadra è stata davanti alla tua in classifica per tutte le prime tre giornate, e solo ora alla quarta ci avete raggiunti"***.
Roberto risponde: *Non ti dimenticare però che alla terza giornata abbiamo pareggiato proprio in casa vostra e che, al contrario di voi, siamo ancora imbattuti"*.
Quanti punti ha ognuna delle due squadre al termine della quarta giornata? (Si assegnano 3 punti alla squadra che vince, 0 punti a quella che perde, 1 punto a ciascuna squadra in caso di pareggio).
(A) 7 **(B)** 6 **(C)** 5 **(D)** 4 **(E)** i dati sono insufficienti.

12) Il prezzo della mascotte delle olimpiadi di matematica è dato dalla somma del prezzo delle materie prime e del prezzo della lavorazione. L'anno scorso la mascotte costava 10 Euro. Quest'anno il costo delle materie prime è raddoppiato, mentre il costo della lavorazione è aumentato del 10%; di conseguenza quest'anno la mascotte costa 12 Euro. Quanto incide quest'anno il prezzo delle materie prime sul prezzo finale del prodotto?

(A) Meno di 1 Euro **(B)** tra 1 e 2 Euro **(C)** tra 2 e 3 Euro
(D) tra 3 e 4 Euro **(E)** più di 4 Euro.

13) Il rapporto fra l'area dell'esagono regolare e quella del poligono stellato rappresentato in figura, che ha tutti i lati giacenti su 6 delle diagonali dell'esagono, è

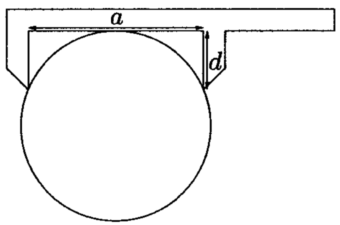


(A) $\frac{4}{3}$ **(B)** $\frac{3}{2}$ **(C)** $\frac{5}{3}$ **(D)** $\frac{6}{5}$ **(E)** $\frac{5}{4}$.

14) Emanuele ha fatto un lungo viaggio e non riesce a dormire. Dopo essere tornato in Italia, alle 11:11 precise ora italiana egli afferma: *"non dormo da 53 ore e 53 minuti"*. A che ora si è svegliato l'ultima volta, sapendo che in quel momento si trovava in Corea e ora si trova in Italia (ricordiamo che la differenza di fuso orario fra l'Italia e la Corea è di 7 ore in avanti)?
(A) 12:04 **(B)** 12:18 **(C)** 12:58 **(D)** 13:04 **(E)** 13:18.

15) Si ha, per ogni x, $f(x) = 4^x$. Allora $f(x+1) - f(x)$ vale:
(A) $f(x)$ **(B)** $2f(x)$ **(C)** $3f(x)$ **(D)** 4 **(E)** 1.

16) Uno studente vuole misurare il diametro di un cilindro usando un calibro. Purtroppo lo strumento disponibile ha i becchi troppo corti, e non è possibile fare in modo che essi tocchino contemporaneamente due punti diametralmente opposti della superficie laterale. Lo studente decide allora di utilizzare il metodo mostrato nella figura a fianco, in cui il bordo del regolo è tangente alla superficie laterale del cilindro. Detta a la misura letta sul regolo del calibro e d la distanza fra l'estremità di un becco e il regolo, si ha che il diametro vale



(A) $\sqrt{a^2+d^2}$ **(B)** $a+\frac{d^2}{4a}$ **(C)** $a+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\frac{d^2}{4}}$ **(D)** $d+\frac{a^2}{4d}$ **(E)** $d+\frac{1}{2}\sqrt{d^2+\frac{a^2}{4}}$

17) Si sa che il numero $2^{48} - 1$ possiede esattamente due divisori compresi fra 60 e 70. Quali sono?
(A) 61 e 63 **(B)** 61 e 65 **(C)** 63 e 65 **(D)** 61 e 67 **(E)** 63 e 69.

18) Siano a, b, c le soluzioni dell'equazione $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$. Sapendo che $ab = 10$, calcolare $c(a+b)$.
(A) -28 **(B)** -18 **(C)** 21 **(D)** 22 **(E)** non si può determinare.

19) Una piramide retta a base quadrata ha tutti gli spigoli di lunghezza unitaria. Il suo volume è
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{6}$ **(C)** $\frac{\sqrt{3}}{6}$ **(D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(E)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

20) Quante sono le coppie ordinate di interi (a, b), con $1 < a < 2000$, $1 < b < 2000$ tali che il minimo comune multiplo fra a e b è uguale a 2000?
(A) 14 **(B)** 20 **(C)** 24 **(D)** 40 **(E)** 48.

21) Sia D il dominio del piano cartesiano costituito dai punti (x, y) tali che $x - [x] \leq y - [y]$, $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 3$ (ricordiamo che $[a]$ indica la parte intera di a ossia il più grande intero minore o uguale ad a). L'area di D è
(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** 6.

22) Un comune dado con le facce numerate da 1 a 6 viene lanciato tre volte e ogni volta si prende un bastoncino di lunghezza pari al risultato del lancio. Qual è la probabilità che i tre bastoncini costituiscano i lati di un triangolo rettangolo?
(A) $\frac{1}{6}$ **(B)** $\frac{1}{36}$ **(C)** $\frac{1}{216}$ **(D)** $\frac{5}{18}$ **(E)** $\frac{1}{72}$.

23) Anna, Barbara, Chiara e Donatella si sono sfidate in una gara di nuoto fino alla boa. All'arrivo non ci sono stati ex–aequo. Al ritorno,
Anna dice: *"Chiara è arrivata prima di Barbara"*;
Barbara dice: *"Chiara è arrivata prima di Anna"*;
Chiara dice: *"Io sono arrivata seconda"*.
Sapendo che una sola di esse ha detto la verità,
(A) si può dire solo chi ha vinto
(B) si può dire solo chi è arrivata seconda
(C) si può dire solo chi è arrivata terza
(D) si può dire solo chi è arrivata ultima
(E) non si può stabilire la posizione in classifica di nessuna.

24) Un ladro ha visto Marco legare la propria bicicletta usando un lucchetto con una combinazione di 4 cifre (ciascuna cifra va da 0 a 9). Non è riuscito a vedere la combinazione ma ha scoperto che almeno due cifre consecutive sono uguali. Qual è il numero massimo di combinazioni che il ladro dovrà provare per rubare la bicicletta a Marco?
(A) 2160 **(B)** 2530 **(C)** 2710 **(D)** 3000 **(E)** nessuna delle precedenti.

25) Nella tomba del faraone Tetrankamon è stato ritrovato uno smeraldo, lavorato a forma di tetraedro (piramide a base triangolare) i cui spigoli misurano in millimetri 54, 32, 32, 29, 27, 20. Indicando con A, B, C, D i vertici del tetraedro e sapendo che AB è lungo 54, quanti millimetri è lungo CD?
(A) 32 **(B)** 29 **(C)** 27 **(D)** 20 **(E)** non si può determinare.